

<https://maisondesprovinces.fr/spip.php?article626>



Géométrie, trigonométrie

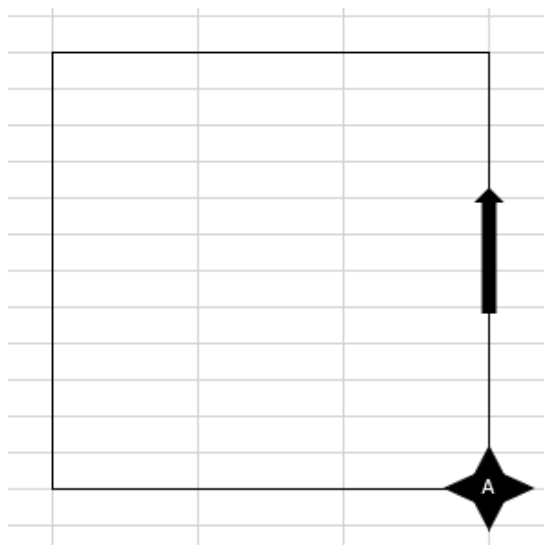


Date de mise en ligne : dimanche 12 avril 2020

Tous droits réservésMaison des Provinces - Tous droits réservés

1. Le tour du pâté de maisons

Le plus facile : le tour du pâté de maisons de forme carrée. Quelle sera la longueur des côtés pour ne pas vous éloigner de plus d'1 km de votre point d'origine/retour situé en A ? Et quels seront la distance totale parcourue et le nombre de pas effectués (64cm/pas en moyenne).

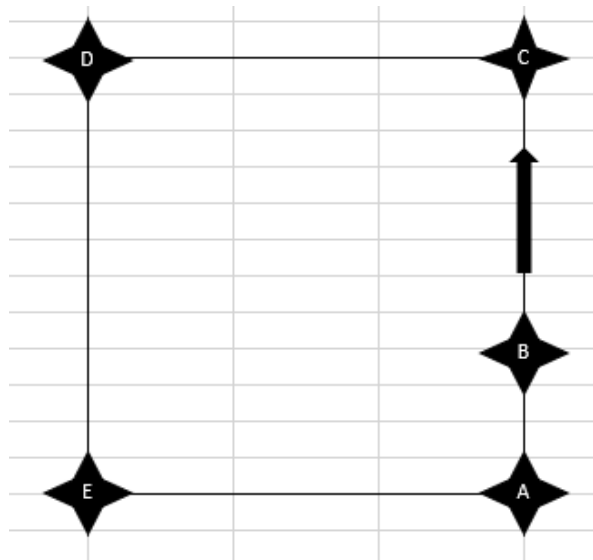


[Voir la réponse](#)

L'angle opposé au point de départ situé en A sera le point le plus éloigné et la diagonale ne pourra donc pas excéder 1000 m. Cette diagonale représente l'hypothénuse des 2 triangles rectangles ainsi formés. Or en vertu du théorème de Pythagore qui s'applique aux triangles rectangles, le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des 2 autres côtés. S'agissant d'un carré, chacun des côtés aura la même longueur. Nous avons donc : carré de l'hypothénuse = $1000 \times 1000 = 1000000$, longueur d'un côté du carré = racine de 1000000 divisée par 2 = 707,10 m (limité à 2 décimales). En faisant le tour vous aurez parcouru : $707,10 \text{ m} \times 4 = 2828,40 \text{ m}$ ou 2,8284 km. Le pas moyen étant de 64 cm vous aurez effectué : 282840 cm divisés par $64 \text{ cm} = 4419,375$ pas.

2. Le tour du pâté de maisons - suite

La suite : le tour du pâté de maisons de forme carrée. Quelle sera la longueur des côtés pour ne pas vous éloigner de plus d'1 km (D) de votre point d'origine/retour situé en B sachant que la longueur AB fait 100 m et que l'angle adjacent à BD et BC = 49,05 degrés (arrondi) ? Et quels seront la distance parcourue et le nombre de pas effectués (64 cm/pas) ?



[Voir la réponse](#)

Nous savons que :

- la droite BD a une longueur maximale de 1000 m
- le côté AB a une longueur de 100
- que l'angle bêta adjacent à BD et BC = 49,05 degrés (arrondi)

Nous pouvons donc calculer la longueur de AD (hypothénuse du carré ACDE) en nous servant de :

- l'angle bêta' complémentaire bêta opposé à l'hypothénuse AD, soit : $180^\circ - 49,05^\circ = 130,95^\circ$ (arrondi)
- l'angle gamma' formé par les côtés adjacents à l'hypothénuse AD et au côté AC qui correspond à 45° (Somme des angles du triangle ACD moins l'angle droit gamma divisé par 2, soit : $(180-90)/2$)
- des sinus des 2 angles connus
- du théorème d'Al Kashi sur les triangles quelconques

Pour utiliser ce théorème il nous faut :

- la longueur de l'un des côtés ici BD, soit : 1000 m
- le sinus de l'angle bêta', soit : $\sin(130,95) = 0,755$
- le sinus de l'angle formé par AD et AC, soit : $\sin(45) = 0,707$

Il nous reste à appliquer la formule que nous donne le théorème, soit : $BD \times ((\sin(\text{bêta}') / \sin(\text{gamma}'))$.

On a donc : $1000 \times (0,755/0,707) = 1068$ m (arrondi)

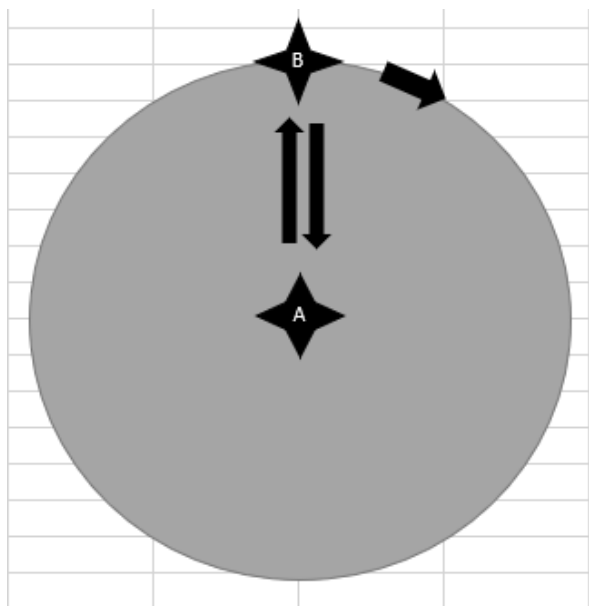
Connaissant la longueur de la droite AD représentant l'hypothénuse du carré ACDE et en appliquant le théorème de Pythagore, nous pouvons déduire la longueur des côtés du carré suivant la formule $AD^2 = AC^2 + CD^2$ soit : $1068^2 = AC^2 + CD^2$, soit : $1140624 = AC^2 + CD^2$. La longueur d'un côté sera donc égale à : $\sqrt{1140624/2}$, soit 755,19 m

Notre carré ACDE a donc un périmètre de : $755,19 \times 4 = 3020,76$ m (arrondi). Nous aurons donc parcouru 3020,76 m ou 3,02076 km et effectué 4719,93 pas ($302076 \text{ cm} / 64 \text{ cm}$).

Et enfin nous pouvons vérifier la validité du théorème de Pythagore en calculant l'hypothénuse BE. $BE^2 = AB^2 + AE^2$, soit : $BE^2 = 100^2 + 755,19^2$ soit : $BE^2 = 10000 + 570311,93 = 580311,9361$. BE sera donc égale à $\sqrt{580311,9361} = 761,78$ m (arrondi).

3. Le pâté de maisons circulaire

Vous partez du point A vers le point B (au maximum de l'éloignement autorisé), vous faites le tour du pâté de maisons en tournant en rond, puis arrivé de nouveau au point B, vous revenez à votre point de départ en A. Quelle sera la distance parcourue en km et en nombre de pas (64 cm/pas) ? Un indice : il faudra vous dépêcher... 1 heure c'est vite passé !



[Voir la réponse](#)

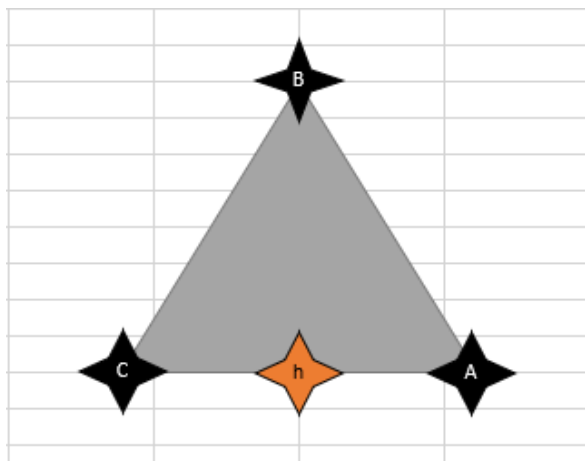
Partant du principe qu'en partant du point A nous ne pouvons pas nous éloigner de plus de 1000 m, le point B se situera donc à 1000 m maximum. Cette distance AB représente donc le rayon de notre cercle. Nous connaissons la formule pour trouver le périmètre (diamètre x π), soit $d = (1000 + 1000) \times \pi = 2000 \times 3,1416$, d'où périmètre $P = 6283,20$ m.

En partant de A pour aller en B puis en effectuant un tour complet pour revenir en B puis finalement en A, nous aurons parcouru : $AB + P + BA$, soit : $1000 + 6283,20 + 1000 = 8283,20$ m ou 8,2832 km et effectué : 12942,50 pas. En une heure... bon courage !

4. Le pâté de maisons en triangle équilatéral

Soit un triangle équilatéral ABC. Comme on ne peut pas s'éloigner de plus d'un 1km du point de départ/retour situé en A, quelle sera la hauteur B_h perpendiculaire à AC ? Pythagore sûrement mais il y a plus rapide ! Quelle sera la

distance parcourue en km et en nombre de pas (64 cm/pas) ?



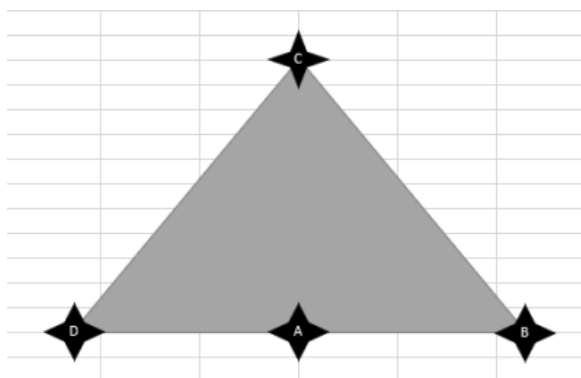
[Voir la réponse](#)

Sachant que l'on ne peut pas s'éloigner de plus de 1000 m du point de départ situé en A le point le plus éloigné sera situé en B à 1000 m. S'agissant d'un triangle équilatéral, les côtés sont tous égaux. Bien sûr nous pouvons utiliser le théorème de Pythagore pour trouver la hauteur Bh perpendiculaire à AC puisque nous connaissons $AB = 1000$ et $Ah = AC/2$ soit 500 m. Mais on sait aussi que la somme des angles d'un triangle est égale à 180° . Dans un triangle équilatéral les angles sont égaux, soit $180/3 = 60^\circ$. Il suffit d'utiliser la trigonométrie et le sinus de l'angle de 60° (angle remarquable), soit $\sin(60) = 0,86602$ et d'appliquer la formule : $\sin(60) \times \text{longueur d'un côté}$, soit : $0,86602 \times 1000$ pour obtenir la hauteur de Bh soit : 866,02 m.

La distance parcourue sera de : $1000 \times 3 = 3000$ m ou 3 km et le nombre de pas effectués de $300000 \text{ cm} / 64 \text{ cm} = 4687,50$ pas.

5. Le pâté de maisons en triangle isocèle

Soit un triangle isocèle BCD. Le départ se situe en A. Comme on ne peut pas s'éloigner de plus d'un 1km du point de départ/retour situé en A, la hauteur AC perpendiculaire à BD sera d'1 km tout comme les segments AB et AD. Quelle sera la distance parcourue en km et en nombre de pas (64 cm/pas) pour revenir au point A ?



[Voir la réponse](#)

Nous savons que AC aura une longueur maximale de 1000 m tout comme AB et AD pour respecter l'éloignement autorisé. Nous avons donc un triangle ABC rectangle en A. Notre cher Pythagore va nous aider à trouver la longueur de BC en utilisant son théorème :

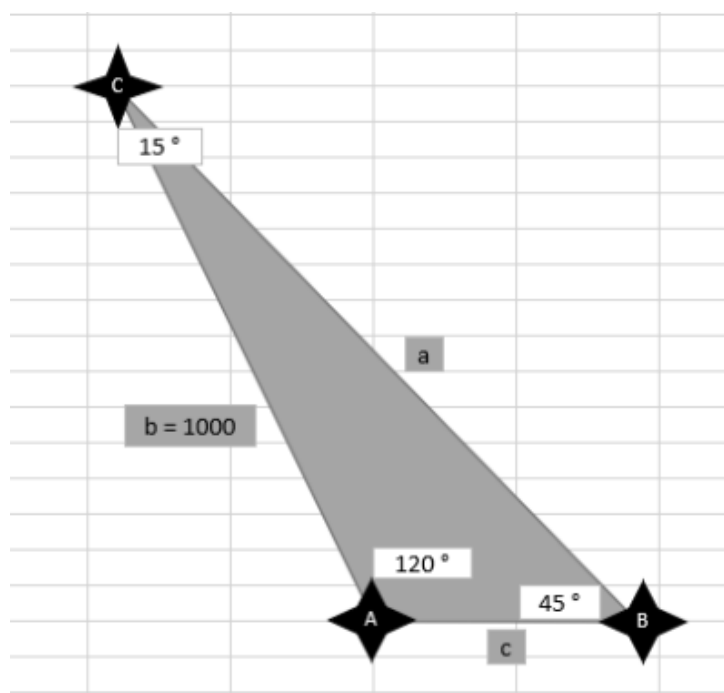
$BC^2 = AC^2 + AB^2$ soit $BC^2 = 1000^2 + 1000^2 = 1000000 + 1000000 = 2000000$. BC sera donc égale à : $\sqrt{2000000} = 1414,21$ m.

En parcourant le triangle dans le sens ABCD avec retour en A nous aurons marché 4828,42 m ou 4,82842 km et réalisé 7544,40 pas.

6. Le pâté de maisons en triangle quelconque

Le pâté de maisons en forme de triangle quelconque avec un point de départ en A dans lequel nous avons : $b = 1000$ m, l'angle alpha en A = 120° , l'angle bêta en B = 45° , l'angle gamma en C = 15° . Calculer :

1. Chacun des côtés a et c
2. Le périmètre du triangle
3. L'aire du triangle



[Voir la réponse](#)

Pour les calculs de celui-ci je vous renvoie au théorème d'Al Kashi vu dans l'exercice N°2.

1. En fonction des paramètres donnés dans l'énoncé, les côtés auront respectivement comme longueur :

- a = 1068,19 m
- b = 1000 m (voir énoncé)
- c = 99,98 m

2. Le périmètre P sera égal à : a + b + c soit : 2168,17 m ou 2,16817 km.

3. L'aire d'un triangle quelconque est égale à :

- racine($P/2 \times (P/2-a) \times (P/2-b) \times (P/2-c)$) soit : racine($1084,08 \times (1084,08-1068,19) \times (1084,08-1000) \times (1084,08-99,98)$) soit racine($1084,08 \times 15,89 \times 84,08 \times 984,10$) soit racine(1425732441) d'où S = 37758,87 m² (arrondi).

7. Jusqu'où ne pas aller pour ne pas dépasser 100 km ?

Sur Terre, pour aller d'un pont A vers un point B il existe 2 routes : la plus courte (qui n'est pas la ligne droite car la Terre est sphérique ! Si, si, n'en déplaise à quelques chagrins) et la plus longue qui est justement la ligne droite. La première se nomme route orthodromique et propose une route où les angles formés avec les méridiens ne sont pas constants (justement parce que la Terre est ronde) et la seconde appelée route loxodromique qui impose un cap constant et où les angles formés avec les méridiens sont égaux et constants. Avec la route orthodromique on peut donc grappiller quelques centaines de mètres, kilomètres par rapport à la route loxodromique (à vol d'oiseau). Voici l'exemple :

Calcul de distance entre deux points de la terre (résultat en miles nautiques)									
		Degrés	Minutes	Secondes					
Point A	Latitude	▲▼	47 ▲▼	56 ▲▼	11	Latitude	☒ Nord ☐ Sud		
	Longitude	▲▼	1 ▲▼	54 ▲▼	45	Longitude	☒ Est ☐ Ouest		
Point B	Latitude	▲▼	47 ▲▼	17 ▲▼	56	Latitude	☒ Nord ☐ Sud		
	Longitude	▲▼	0 ▲▼	53 ▲▼	36	Longitude	☒ Est ☐ Ouest		
Distance		56,2327762 NM				104,143102 km			

Route orthodromique pour aller du point A (domicile) au point B (à proximité d'Athée sur Cher (37) où réside une partie de la petite famille). Cette route donne l'arc-rayon le plus court. Autrement dit... je ne peux pas y aller sans enfreindre les directives mais on peut se retrouver au bar du coin situé un peu à l'est dans le centre du village, s'il est ouvert.

[Voir le calcul](#)

1. Les coordonnées sont converties en degrés sexagésimaux (formule : ((degrés x 3600) + (minutes x 60) + secondes) / 3600.

2. Puis on calcule la distance en miles nautiques (NM) en appliquant la formule : $60 \times \text{RACINE}((\text{Latitude A} - \text{Latitude B})^2 + (\cos(((\text{Latitude A} + \text{Latitude B}) / 2) / (180 / \text{PI}))) \times (\text{Longitude A} - \text{Longitude B}))^2)$.

3. Pour finir on convertit les miles nautiques en kilomètres par la formule : Distance en NM x 1,852. Et voilà ! :-)

Pour rappel, la latitude a pour point d'origine l'équateur et la longitude a pour point d'origine le méridien de Greenwich.

Pour celles et ceux que les calculs rebutent voici un site qui permet de dessiner facilement un cercle de 100 km depuis son domicile :

[Accéder à CalcMaps](#)

[Retourner sur la page des jeux](#)